Equidad y Desarrollo

Volume 1 | Number 12 Article 2

January 2009

Para leer a Shoven y Whalley: otra introducción práctica al modelamiento aplicado de equilibrio general económico

Juan Carlos Segura Ortiz
Universidad de La Salle, Bogotá, jcsegura@lasalle.edu.co

Citación recomendada
Segura Ortiz, J. C. (2009). Para leer a Shoven y Whalley: otra introducción práctica al modelamiento aplicado de equilibrio general económico. Equidad y Desarrollo, (12), 23-54. https://doi.org/10.19052/ed.214

Para leer a Shoven y Whalley: otra introducción práctica al modelamiento aplicado de equilibrio general económico[1]

Juan Carlos Segura Ortiz*

Resumen

El objetivo del artículo "Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey" (Shoven & Whalley, 1984) es mostrar cómo el esquema walrasiano de equilibrio general puede convertirse en un poderoso instrumento para el análisis de política mediante la parametrización y especificación de un modelo teórico de equilibrio económico, y su posterior solución bajo escenarios contrafactuales. A pesar de que los autores proporcionan un ejemplo numérico detallado y ofrecen una guía para el desarrollo de un proyecto de equilibrio general computable, que hoy constituye la referencia estándar, el acceso a las técnicas descritas sigue siendo dificultoso, aun en un medio como el actual, en el que se dispone de recursos cuya utilización en el tiempo de publicación del artículo de referencia, estaba mediada por altísimos costos. La barrera de entrada está constituida por la dificultad del aprendiz para hacer compatibles sus conocimientos teóricos con la práctica empírica de la formulación y solución numérica. Este artículo contribuye a sobrellevar estos inconvenientes asociados, replicando el modelo numérico en Shoven y Whalley como la búsqueda de la solución numérica del sistema de ecuaciones de exceso de demanda. Se ofrece un modelo computable escrito en GAMS, que puede ser modificado y adaptado para la posterior extensión del esquema básico.

Palabras clave: equilibrio general, equilibrio general computable, modelo Arrow-Debreu, microeconomía aplicada.

Clasificación JEL: D58, D61, E61, E62.

1 Este artículo es producto de la investigación "Análisis computacional de equilibrio para la valoración de la política de desarrollo".

* Director del programa de Economía de la Universidad de La Salle. Miembro del grupo de investigación en Economía Laboral. Economista de la Universidad de La Salle. Magíster en Economía, Universidad de los Andes. Master of Science, Maryland State University (USA).
Correo electrónico: jcsegura@lasalle.edu.co

Fecha de recepción: 30 de septiembre de 2009.
Fecha de aprobación: 13 de octubre de 2009.

Reading Shoven and Whalley: yet another practical introduction to applied general equilibrium modeling

Abstract

The aim of the "Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey" (Shoven & Whalley, 1984) is to show how the Walrasian General Equilibrium scheme can be converted into a powerful instrument for policy analysis through parameterization and specification of a theoretical model for numerical solution and estimation under counterfactual scenarios. Even though authors propose a numerical example along with a standard guideline for the formal development of a Computable General Equilibrium project, the formal access to the techniques remains difficult even nowadays in which availability of resources, –which at the time of publishing were mediate by the higher costs– has been dramatically enhanced since then. The entrance barrier is an apprentice difficulty to match her theoretical knowledge with the empirical practice of formulation and numerical solution search. The aim of this paper is to contribute to remove such inconveniences by the reproduction of the numerical model offered by Shoven and Whalley as well as the search of a solution for the excess demand system than represents the economic relationships within the model economy. We offer a computable model in the GAMS that might be easily modified and adapted for further extensions.

Keywords: general equilibrium, computable general equilibrium, Arrow-Debreu model, applied microeconomics.

Presentación

Desde 1984, año de publicación del artículo "Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey" (Shoven & Whalley, 1984), la literatura sobre modelamiento aplicado de equilibrio general ha venido en incesante aumento: los contenidos teóricos del esquema walrasiano dejan de ser una referencia abstracta para tornarse en un esquema útil para la construcción de análisis empíricos de mayor complejidad y riqueza que los usuales de equilibrio parcial. La amplia oferta de lenguajes para el modelamiento matemático y la rapidez y confiabilidad de los computadores personales actuales, han hecho posible que aquellos atributos que en la visión de Shoven y Whalley (S&W) hacían del economista hábil para estos menesteres una selecta especie de *jack-of-all-trades*[2], se hayan relajado con apreciables consecuencias sobre el costo de implementación de esta clase de proyectos de modo que, incluso en cursos de pregrado, los modelos computables de equilibrio económico se han tornado en modernos laboratorios en los cuales las teorías macro y microeconómica, así como el análisis costo-beneficio relativo al diseño de política pública, pueden verse en acción.

El centro de atracción en S&W es una economía modelo, susceptible de ser computarizada para luego ser utilizada en la ejecución de experimentos de política en escenarios contrafácticos. Como los resultados que tienen en cuenta los efectos de retroalimentación e interacción entre individuos, mercancías y mercados son bastante menos obvios que aquellos obtenidos a través de métodos conjeturales, el valor resultante es la opción de una mayor complejidad y riqueza analítica que aquella encontrada en las estructuras en las que el supuesto *céteris páribus* se impone. Además, por tratarse de modelos cuantitativos fundamentados en la optimización, es posible derivar medidas de bienestar que hacen posible evaluar costos y beneficios relativos a una cierta iniciativa de política, y que señalan que en algunas ocasiones la visión del analista debe ser enriquecida con resultados más detallados sobre la interacción entre individuos, entre mercados y la neutralidad o su ausencia en las variables instrumentales disponibles.

Veinticinco años después de la publicación del artículo, la construcción de un modelo computable de equilibrio general resulta ser una tarea menos complicada gracias a: i) la disponibilidad de algoritmos robustos que mejoran sustancialmente la propuesta de Herbert Scarf (1982) para el cómputo de la(s) solución(es) de sistemas complejos de equilibrio económico; ii) la oferta de computadoras más baratas, confiables y rápidas; iii) el desarrollo de lenguajes de alto nivel para el modelamiento matemático como el General Algebraic Modeling System (GAMS) (Kendrick & Meeraus, 1985) que reducen sensiblemente los tiempos de diseño, modelamiento, especificación y experimentación; y iv) la producción periódica de estadísticas y de parámetros funcionales de parte de los sistemas estadísticos nacionales, de otras agencias gubernamentales y de centros diversos de investigación. En efecto, a comienzos de la década de los ochenta, S&W declaraban con aprehensión[3]:

> […] Uno de los problemas que más comúnmente encuentran los modelistas es la necesidad de ser "toderos"[4]. Los modelistas deben conocer la teoría del equilibrio general con el fin de proporcionar una sólida base para sus modelos; deben saber cómo resolverlos; necesitan ser hábiles programadores (o al menos tener comunicación con programadores); deben

2 *Ver* nota al pie 4.

3 Traducción del autor.

4 Uso el término coloquial "todero" para traducir en forma aproximada el término *jack-of-all-trades* del original en inglés; el término corresponde a la expresión "*Jack-of-all trades, master of none*", cuya versión aproximada en castellano podría ser: *enterado de todo, experto en nada.*

> entender los asuntos de política en los que trabajan; deben tener conocimiento de las fuentes de datos y todos los problemas asociados; y deben estar familiarizados con la literatura relevante, especialmente con aquella sobre elasticidades (Shoven & Whalley, 1984: 1047).

Muchos de los requerimientos señalados pueden satisfacerse con relativa facilidad mediante la provisión de equipo, *software* y datos en cantidad y calidad suficientes, si bien resulta que el conocimiento detallado y preciso de la teoría no se puede dispensar, como tampoco puede serlo la familiaridad que el modelista debe tener con el asunto de política que está tratando. Y, con todo, el artículo de S&W, que es con frecuencia la introducción a esta disciplina, suele resultar menos claro que lo deseable para el principiante, quien encuentra dificultad en hacer compatible su conocimiento teórico con la práctica empírica de la formulación y solución numérica. Se quiere ilustrar la conexión entre la conceptualización teórica y la práctica empírica, replicando el ejemplo numérico de S&W, con el objetivo de mostrar que el conjunto esencial de técnicas involucradas por la disciplina es accesible y útil, siempre que el analista disponga de una adecuada comprensión teórica del esquema de equilibrio general competitivo.

El orden de estas notas es como sigue: puesto que como señalan S&W, "el objeto explícito de esta literatura es tornar la estructura walrasiana de equilibrio general (formalizada en los años cincuenta por Kenneth Arrow, Gerard Debreu y otros) de una representación abstracta de una economía, en modelos verosímiles de las economías reales" (Shoven & Whalley, 1984: 1045), la siguiente sección se ocupa de presentar las características del modelo de equilibrio general walrasiano en términos del modelo Arrow-Debreu (Debreu, 1959; Arrow & Hahn, 1971), en tanto que, en la tercera sección, la economía modelo propuesta en S&W es sujeto de una descripción analítica, con el objetivo de explicar la relación entre este modelo y el modelo teórico, y preparar la especificación numérica. En la cuarta sección se muestra, paso a paso, una de las diversas maneras en las cuales esa economía modelo puede ser implementada empíricamente haciendo uso del GAMS, y se replican los resultados del ejercicio contrafáctico que los autores proponen. En la sección quinta se presentan las conclusiones.

Equilibrio general competitivo: conceptos

Una economía de propiedad privada –un arreglo social en el cual los consumidores son propietarios de los factores de producción y de las empresas–, puede ser representada en forma reducida aunque completa por una tupla:

$$E_{pp} = \left[\left(X_i, u_{i,}\omega_i\right)_{i=1}^{m}, \left(Y_j\right)_{j=1}^{n}, \theta_{ij}\right] \quad (1)$$

Para cada uno de los $i = 1, \cdots, m$ consumidores, X_i, u_i, ω_i representan el conjunto de consumo del i-ésimo consumidor, sus preferencias y sus dotaciones iniciales. Por su parte, para cada una de las $j = 1, \cdots, n$ empresas, existe un conjunto de producción Y_j que resume las opciones tecnológicas del productor j-ésimo y que deberá satisfacer algunas propiedades específicas en el caso de competencia perfecta. Finalmente, un número $\theta_{ij} \in [0,1]$ indica la participación del i-ésimo consumidor en la propiedad de la j-ésima empresa. En relación con los componentes de la lista de características (1) se asumen algunas particularidades (Varian, 1993; Mas-Colell *et ál.*, 1995; Jehle & Rény, 2001) que se resumen en los supuestos C y P a continuación:

Supuesto C: $\forall i = 1, \cdots, m$

a. $X_i = \mathbb{R}_+^{\ell}$

b. $u_i\colon \mathbb{R}_+^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, estrictamente cuasicóncava y no saciable; y

c. $\omega_i \gg 0$

Supuesto P: $\forall j = 1, \cdots, n$

a. Y_j es conjunto cerrado;

b. $Y_j - \mathbb{R}_+^\ell \subset Y_j$

c. $Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell = \{\emptyset\}$

d. Y_j es estrictamente convexo;

e. $\exists\, \mathbf{q} \subset \mathbb{R}_{++}^\ell$ tal que si $\left[(\mathrm{x}_i)_{i=1}^m, (\mathrm{y}_j)_{j=1}^n\right]$ es una asignación factible, entonces
$-\mathbf{q} \ll \mathrm{y}_j \ll \mathbf{q} \;\; \forall\, j = 1, \cdots, n$

El supuesto C dice que cada consumidor tiene un conjunto de consumo dado por el conjunto de los números reales positivos, que existe una función de utilidad que representa adecuadamente su sistema de preferencias –en teoría completas, transitivas, continuas, estrictamente convexas y no saciables–, y que cuenta con una dotación inicial de recursos en los reales positivos. El supuesto P dice que todas las empresas tienen conjuntos de producción cerrados y acotados, que la decisión de no producir hace parte de las opciones del productor, que existe la posibilidad de eliminación gratuita y que el conjunto de producción es estrictamente convexo. Finalmente, el punto e del supuesto P establece que la producción está limitada por la riqueza disponible en la sociedad.

Bajo las condiciones impuestas por los supuestos C y P, a cada una de las $k = 1, \cdots, \ell$ mercancías corresponde un único precio, de manera que la *j*-ésima firma escogerá entre su conjunto de producción un plan $\mathrm{y}_j \in Y_j$ que maximiza su ingreso neto $\pi(\mathrm{p})\colon \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}$, dado un sistema de precios $\mathrm{p} \in \mathbb{R}_{++}^\ell$. Puesto que la propiedad de la *j*-ésima firma se reparte entre los *m* consumidores de acuerdo con los coeficientes de participación θ_{ij}, el ingreso del consumidor *i* será una función continua de los precios *p*:

$$M_i(\mathrm{p}) = \mathrm{p}\omega_i + \Sigma_{j=1}^n \theta_{ij}\pi_j(\mathrm{p}) \quad (2)$$

Donde $\forall i$, el ingreso, es el valor de sus dotaciones iniciales más la suma de sus participaciones en el beneficio de la *j*-ésima firma, dado $\mathrm{y}_j^*(\mathrm{p}) = argmax\{\pi_i = \mathrm{p}\mathrm{y}_j : \mathrm{y}_j \in Y_j\}$. Del lado del consumidor, este elige un plan de consumo $x_i \in X_i = \mathbb{R}_+^\ell$ con el propósito de maximizar su utilidad sobre su conjunto presupuestal $\beta_i(\mathrm{p}, M_i(\mathrm{p}))$, de manera que en el óptimo $\mathrm{x}_i^*(\mathrm{p}) = argmax\{u_i(\mathrm{x}_i) : \mathrm{p}\mathrm{x}_i + \Sigma_{j=1}^n \theta_{ij}\pi_j(\mathrm{p}); \mathrm{x}_i \in \mathbb{R}_+^\ell\}$. Definiendo $d_i(\mathrm{p}) = \mathrm{x}_i^*$ como la demanda del *i*-ésimo consumidor a los precios p, y $s_j(\mathrm{p}) = \mathrm{y}_j^*$ como la oferta de la *j*-ésima empresa bajo ese mismo régimen de precios, la función $z(\mathrm{p})\colon \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}$, que relaciona las demandas agregadas sobre los *m* consumidores con las ofertas agregadas sobre las *n* firmas, determina la diferencia entre las cantidades demandadas y ofrecidas de la *k*-ésima mercancía en la economía. Esta función es la función de exceso de demanda:

$$z(\mathrm{p}) = \Sigma_{i=1}^m d_i(\mathrm{p}) - \Sigma_{i=1}^m \omega_i - \Sigma_{j=1}^n s_j(\mathrm{p}) \quad (3)$$

La parte b del supuesto C implica que en el óptimo el consumidor habrá de gastar todo su ingreso, por lo que el valor de la función de exceso de demanda será cero en el equilibrio:

$$\mathrm{p}\left(\Sigma_{i=1}^m d_i(\mathrm{p}) - \Sigma_{i=1}^m \omega_i - \Sigma_{j=1}^n s_j(\mathrm{p})\right) = 0 \quad (4)$$

Es decir, $\mathrm{p}z(\mathrm{p}) \equiv 0$, lo que expresa la ley de Walras: el valor del exceso de demanda es idénticamente igual a cero. Más aún, la función de exceso de demanda presenta las siguientes propiedades (Ginsburgh & Keyzer, 1997):

Supuesto Z:

a. $z(p)$ es continua, definida para $\mathrm{p} \geq 0; \mathrm{p} \neq 0$

b. $z(p)$ es continuamente diferenciable para $\mathrm{p} \geq 0$

c. $z(p)$ es homogénea de grado cero en p;

d. $pz(p)$ es idénticamente igual a cero;

e. $p_k = 0$ implica $z_k(\mathrm{p}) > 0, \forall k$

Las partes a y b del supuesto Z resultan del hecho de que la función de exceso de demanda es la agregación de demandas individuales que varían en forma continua con los precios. Como es habitual, en los casos en los que las condiciones C o P son relajadas para permitir, por ejemplo, rendimientos constantes o crecientes, es posible que la continuidad no sea de estricto cumplimiento y que existan consecuencias, de cualquier modo previsibles, que implicarán adopción de decisiones específicas de parte del modelista. La parte c del supuesto Z surge de la homogeneidad de grado cero de las demandas individuales, mientras que la parte d es consecuencia dicha circunstancia; finalmente, la parte e busca evitar discontinuidades en la demanda de la función de exceso de demanda cuando el precio de la k-ésima mercancía es cero, pues en este caso la demanda individual se haría infinita y podría incorporar discontinuidades en la demanda neta agregada. En relación con la parte e del supuesto Z, si se reemplazan $pz(p)$ por sus componentes:

$$\textstyle\sum_i \mathrm{p} d_i(\mathrm{p}) = \sum_i \mathrm{p}\omega_i + \sum_{ij}\theta_{ij}\mathrm{p} s_j(\mathrm{p}) \quad (5)$$

De aquí que para cada precio no nulo y no negativo, el valor de la demanda agregada debe ser igual al valor de la oferta agregada. Así, bajo los supuestos C, P, y Z, es posible definir el concepto de *equilibrio*.

Definición de equilibrio competitivo: en una economía de propiedad privada E_{pp}, un equilibrio competitivo es una tupla:

$$\left[\mathrm{p}^*,\ (\mathrm{x}_i^*)_{i=1}^m, \left(\mathrm{y}_j^*\right)_{j=1}^m\right] \in \mathbb{R}^{\ell(1+m+n)} \quad (6)$$

tal que:

a. $\mathrm{x}_i^*(\mathrm{p})$ es un plan de consumo que maximiza u_i sobre el conjunto presupuestal $\beta_i(\mathrm{p})$,

b. $\mathrm{y}_j^*(\mathrm{p})$ es un plan de producción que maximiza π_j sobre el conjunto de producción Y_j , y

c. las asignaciones $\left[(\mathrm{x}_i^*)_{i=1}^m, \left(\mathrm{y}_j^*\right)_{j=1}^n\right]$ son viables, es decir: $\sum_i x_i^* \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*$

En otras palabras, un equilibrio es un vector de precios y una asignación tales que bajo dicho régimen de precios, a) cada consumidor maximiza su utilidad sobre su conjunto presupuestal, b) cada productor maximiza su beneficio sobre su conjunto de producción, y c) la oferta es igual a la demanda en todos los mercados. Bajo la observación estricta del supuesto Z, es posible usar el teorema del punto fijo de Brouwer en la construcción de un bosquejo de prueba de existencia de una solución para el sistema $z(p)$ (Jehle & Reny, 2001: 193; Varian, 1993: 320-321; Monsalve, 1999: 19-20).

Shoven y Whalley ponen números al modelo walrasiano

El modelo Arrow-Debreu es una abstracción analítica que no tiene objetivo distinto a mostrar que, dadas ciertas condiciones de regularidad en las preferencias de los consumidores y los conjuntos de producción de las firmas, existirá un régimen de precios que hará compatibles las ofertas y las demandas de los mercados, haciendo de estos las instituciones mediante las cuales la estructura social responde a las habituales preguntas qué, cómo y para quién producir, esto es, el modelo Arrow-Debreu es sencillamente la elaboración matemática de una teoría sobre la determinación de precios y cantidades en un mundo de mercados perfectamente competitivos. Aún el valor metodológico asociado con la teoría del equilibrio general tiene que ver con la concepción de las economías como sistemas cerrados y completos con componentes interrelacionados en el cual se precisa calcular de forma simultánea todas las variables de interés, dada una lista mínima de realidades características de los elementos que componen el sistema (Mas-Colell *et ál.*, 1995: 511). Por lo tanto, si fuera posible conocer los resultados de los cambios en los parámetros fundamentales sobre el equilibrio de la economía tal como se ha definido en (6), se tendría una buena guía para el diseño de acciones, incentivos e iniciativas públicas tendientes a mejorar el desarrollo (Villar, 1999: 163) que es, según parece, la visión que justifica la preocupación de S&W por dar un uso práctico al modelo de equilibrio general. En efecto, en su artículo de 1984, introducen la construcción de una aplicación computable susceptible de ser utilizada en la valoración *ex ante*/*ex post* de distintas opciones de política pública, una nueva disciplina que en expresión de O'Rourke (1995) es la reunión de teoría y números. En la sección II del artículo de S&W, "What Is Applied General-Equilibrium Analysis", se discute el significado que los autores otorgan al término "equilibrio general":

> […] Nuestro uso del término corresponde al bien conocido modelo Arrow-Debreu, según la elaboración de Arrow y F. H. Hahn (1971). En este modelo se especifica el número de consumidores, cada uno de los cuales cuenta con una dotación inicial de las *N* mercancías y un conjunto de preferencias que dan lugar a funciones de demanda para cada bien. Las demandas de mercado son la suma de las demandas individuales de los consumidores. Las demandas de mercado por las mercancías depende de todos los precios, son continuas, no negativas, homogéneas de grado cero (es decir, no hay ilusión monetaria) y satisfacen la ley de Walras (esto es, bajo cualquier régimen de precios, el valor del gasto del consumidor es igual a su ingreso). Del lado de la producción, la tecnología se representa ya sea con actividades de retornos constantes o con funciones de producción de retornos decrecientes a escala. Los productores maximizan beneficios. La homogeneidad de grado cero de las funciones de demanda y la homogeneidad lineal de los beneficios en los precios (es decir, al doblar los precios se dobla el beneficio monetario) implican que solo los precios relativos son importantes; el nivel absoluto de precios no ejerce influencia en el resultado del equilibrio (Shoven & Whalley, 1984: 1009).

La caracterización del equilibrio para esta economía corresponde con exactitud a su definición en la sección previa: el equilibrio aquí se caracteriza por un conjunto de precios y de niveles de producción en cada industria, tales que la demanda de mercado es igual a su oferta para todos los bienes (*Ibíd*.).

Ténganse en cuenta algunas consideraciones metodológicas: con Munk (2005), la construcción de un modelo matemático que represente un sistema real requiere, de un lado, una serie de proposiciones refutables (Silberberg & Suen, 2001: 2-23, 577-560) que como en el caso del modelo Arrow-Debreu prometan una historia creíble sobre la manera como los componentes de una economía de mercado se articulan y dan lugar a un resultado particular, y, de otro, un conjunto de datos que delimiten el alcance espacial y temporal del sistema que se quiere describir. Por otra parte, una teoría suficientemente bien articulada puede ser formalizada como un modelo teórico en el que las proposiciones refutables que la articulan aparezcan expresadas en términos matemáticos; si estas relaciones matemáticas se especifican de modo que puedan ser estimadas, se hará referencia a un modelo teórico parametrizado. Al añadir al modelo teórico parametrizado un conjunto de estimaciones de los parámetros que lo caracterizan, se obtiene un modelo completamente especificado. De nuevo con Munk (2005: 3), un modelo completamente especificado, cuyo contenido teórico es el modelo Arrow-Debreu –o cualquier otra sistematización de la propuesta walrasiana–, es un *modelo de equilibrio general computable* o CGE por su sigla en inglés[5]. El esfuerzo de S&W puede entenderse como la transformación de un modelo teórico en un modelo completamente especificado de equilibrio general, mediante la parametrización y completa especificación del modelo teórico.

El modelo empírico de S&W empieza con la definición de sus dimensiones, cuestión que en la práctica supone comenzar por dar valores a los elementos de conjunto de datos fundamentales (1). El conjunto de mercancías contiene tanto bienes finales (manufactureros y no manufactureros) como factores de producción (capital y trabajo), y los consumidores pertenecen a una de dos clases sociales: rico o pobre, las cuales, con dotaciones de factores positivas, se distinguen por el carácter de los activos que poseen; es así que el consumidor rico detenta la propiedad del capital, mientras el consumidor pobre es propietario único de la fuerza de trabajo.

La producción, que teóricamente coincide con los requerimientos del supuesto P, se especifica como una función linealmente homogénea del tipo CES. Como no hay consumos intermedios, el producto es igual al valor agregado; las funciones de demanda por bienes finales se derivan de la maximización de una función de utilidad de la clase CES sobre el conjunto presupuestal que en la sección anterior se representó por la expresión (2); los consumidores no demandan factores.

En S&W se adopta una notación que difiere de aquella que se ha utilizado en la presentación del modelo teórico: en la economía modelo propuesta hay i = {manufacturero, no manufacturero} sectores productivos y c = {pobre, no pobre} tipos de consumidores; la equivalencia entre estos conjuntos y los de la representación Arrow-Debreu es inmediata y no implica pérdida de continuidad. La función de producción de la firma i es una agregación CES sobre el trabajo y el capital utilizados por esa empresa:

$$Q_i = \phi_i \left[\delta_i L_i^{\frac{(\sigma_i - 1)}{\sigma_i}} + (1-\delta_i) K_i^{\frac{(\sigma_i - 1)}{\sigma_i}} \right]^{\frac{\sigma_i}{(\sigma_i - 1)}} \qquad (7)$$

De la minimización del costo total unitario sujeto a (7), se obtienen las demandas de factores de la firma i:

$$L_i = \phi_i^{-1} Q_i \left[\delta_i + (1-\delta_i) \left[\frac{\delta_i P_K}{(1-\delta_i) P_L} \right]^{(1-\sigma_i)} \right]^{\frac{\sigma_i}{(1-\sigma_i)}} \qquad (8)$$

$$K_i = \phi_i^{-1} Q_i \left[\delta_i \left[\frac{(1-\delta_i) P_L}{\delta_i P_K} \right]^{(1-\sigma_i)} + (1-\delta_i) \right]^{\frac{\sigma_i}{(1-\sigma_i)}} \qquad (9)$$

En el anexo 1 se muestra paso a paso cómo obtener (8) y (9), así como versiones más generales de estas funciones, que son las utilizadas en nuestra especificación computable:

$$L_i = \frac{Q_i}{\phi_i} \frac{(1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot P_L^{\frac{1}{(\rho_i - 1)}}}{\left(\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot P_K^{\frac{\rho_i}{(\rho_i - 1)}} + (1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot P_K^{\frac{\rho_i}{(\rho_i - 1)}} \right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \qquad (8')$$

5 *Computable General Equilibrium*. En ocasiones también AGE: *Applied General Equilibrium*.

$$K_i = \frac{Q_i}{\phi_i} \frac{\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} . P_K^{\frac{1}{(\rho_i - 1)}}}{\left(\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} . P_K^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}} + (1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} . P_K^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}} \right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \quad (9')$$

P_k y P_L son los precios unitarios del capital y del trabajo, respectivamente, y ϕ_i una medida de la productividad total factorial de la firma *i*; la elasticidad de sustitución en el paquete *K-L* se relaciona con el parámetro ρ_i, mediante $\sigma_i = \rho_i / 1 + \rho_i$. Del lado de la demanda por bienes finales, cada uno de los c consumidores resuelve el siguiente problema:

$$\max_{X_i^c} \left[\sum_i \alpha_i^{c \frac{1}{\sigma_c}} \cdot X_i^{c \frac{(\sigma_c - 1)}{\sigma_c}} \right]^{\frac{\sigma_c}{(\sigma_c - 1)}} \quad s.a. \ \sum_i P_i X_i^c = I^c \quad (10)$$

La solución de este problema (ver anexo 2) es el conjunto de demandas ordinarias o de Marshall por la mercancía *i* del consumidor *c* (ecuaciones (5) en S&W):

$$X_i^c = \frac{\alpha_i^c I^c}{P_i^{\sigma_c} \left(\alpha_1^c P_1^{(1-\sigma_c)} + \alpha_2^c P_2^{(1-\sigma_c)} \right)} \quad (11)$$

Adviértase que las demandas (8), (9) y (11) dependen de todos los precios, por lo que la observación de la parte *c* del supuesto *Z* es inmediata: el ingreso del *c*-ésimo consumidor, I^c, que aparece en forma explícita en las ecuaciones (11), es el valor de las dotaciones de los individuos, que se venden en el mercado de factores a los precios P_k y P_L, y corresponde a la especificación (2).

Las condiciones de equilibrio del modelo requieren que, para cada mercancía, la oferta sea exactamente igual a la demanda, esto es, la economía admite una representación como la que se propone en las expresiones (3), (4) o (5). Dado que S&W verifican rendimientos constantes en los factores de producción, se precisará satisfacer condiciones de beneficio cero que hagan posible descartar la obtención de rentas no asociadas con la producción. Así, y con la definición de S&W, el modelo consta de tres bloques de ecuaciones:

a. Equilibrio del mercado de factores (ecuaciones (6) y (7) en S&W):

$$\sum_i K_i(P_L, P_K; Q_i) = \bar{K} \quad (12)$$

$$\sum_i L_i(P_L, P_K; Q_i) = \bar{L} \quad (13)$$

b. Equilibrio en el mercado de bienes finales (ecuaciones (8) y (9) en S&W):

$$\sum_c X_i^c(P_i, P_L, P_K) = Q_i \quad (14)$$

c. Condiciones de beneficio cero (ecuaciones (10) y (11) en S&W):

$$P_K K_i(P_L, P_K; Q_i) + P_L L_i(P_L, P_K; Q_i) = P_i Q_i \quad (15)$$

$\bar{K}$ y $\bar{L}$ representan las ofertas (inelásticas) de factores primarios y corresponden a las dotaciones iniciales de los consumidores. El modelo conformado así, contendrá doce variables: los precios P_1, P_2, P_K, P_L, las demandas finales $X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2$, que provienen de la maximización de la utilidad del consumidor *c*, y las demandas por factores K_1, K_2, L_1, L_2, que surgen de la minimización del costo total de la firma *i*. En otros términos, consultando la definición sobre equilibrio competitivo ut supra, la solución del modelo se obtiene mediante la búsqueda de un equilibrio general, tal cual se expresa en (6). Reiterando nuestra visión, las ecuaciones (12), (13) y (14) conforman para el caso del modelo numérico de S&W, el sistema de excesos de demanda, en el cual, para la *k*-ésima mercancía, la definición (3) es de observación obligatoria, esto es, para $\forall k = 1, \cdots, \ell$:

$$z_k(\text{p}) = \underbrace{\sum_i d_{ik}(\text{p})}_{Demandas} - \underbrace{\sum_i \omega_{ik} - \sum_j s_{jk}(\text{p})}_{Ofertas} \quad (16)$$

Es decir, la función de exceso de demanda para una mercancía cualquiera debe reunir dos componentes: demandas y ofertas; en este sentido, cada una de las ecuaciones de balance (12)~(14) son expresiones particulares de cada mercancía de la ecuación (16). En efecto, al hacer referencia a los bienes de consumo final, la ecuación (14) compara las demandas agregadas de los *c* consumidores por la mercancía i, $X_i^c(P_i, P_L, P_K)$ con sus ofertas Q_i ; visto que los consumidores no tienen dotaciones iniciales de las mercancías producidas que demandan, el término $\sum_i \omega_i = 0$ en el caso de las funciones de exceso de demanda para los bienes finales. Dadas estas consideraciones, la función de exceso de demanda correspondiente a los bienes producidos por el sector manufacturero (MN), reuniría ofertas y demandas agregadas sobre los distintos agentes interesados:

$$z_{MN}(\mathrm{p}) = \sum_c X_{MN}^c(P_i, P_L, P_K) - \sum_i Q_{MN} \quad (16´)$$

Esta función, al ser parametrizada, adoptaría una especificación funcional particular (observe que no se han reemplazado las expresiones correspondientes a las demandas de factores):

$$z_{MN}(\mathrm{p}) = \sum_c \frac{\alpha_{MN}^c(P_L L_c + P_K K_c)}{P_{MN}^{\sigma_c}\left(\alpha_{MN}^c P_{MN}^{(1-\sigma_c)} + \alpha_{NM}^c P_{NM}^{(1-\sigma_c)}\right)} - \sum_i \phi_{MN}\left[\delta_{MN} L_{MN}^{\frac{(\sigma_{MN}-1)}{\sigma_{MN}}} + (1-\delta_{MN}) K_{MN}^{\frac{(\sigma_{MN}-1)}{\sigma_{MN}}}\right]^{\frac{\sigma_{MN}}{(\sigma_{MN}-1)}} \quad (16'')$$

En el caso de los factores de producción (ecuaciones (12) y (13)), las dotaciones son estrictamente positivas y fijas mientras que, por ser recursos no producidos, la expresión equivalente a $\sum_j s_j(\mathrm{p})$ (ofertas producidas) se hace necesariamente cero en las funciones de exceso de demanda asociadas.

Finalmente, el conjunto de ecuaciones (15) garantiza que el proceso fabril se lleve a cabo bajo rendimientos constantes a escala y que el precio de las mercancías producidas sea expresión de los costos de producción, eliminando la posibilidad obtención de rentas provenientes de alguna fuente de poder de mercado; por tratarse de tecnologías de rendimientos constantes, la maximización del beneficio da lugar a una correspondencia de oferta para la cual los beneficios son idénticamente iguales a cero; consecuencia de esta circunstancia es que los ingresos de los consumidores por concepto de la participación en el beneficio de las firmas, sean cero.

El sistema (12)~(15) consta de seis ecuaciones que deberían hacer posible encontrar el valor de las doce variables endógenas. Teniendo en cuenta, no obstante, que los componentes del exceso de demanda –ofertas y demandas individuales de los ($c + i$) agentes económicos en la economía de laboratorio– son funciones continuas de todos los precios, la tarea de buscar un equilibrio consiste en hallar un vector de precios $\mathrm{p} = [P_L,\ P_K,\ P_1 \text{ y } P_2]$ tal que el sistema (12)~(15) se satisfaga con igualdad: el problema se reduce de un sistema de doce variables en seis ecuaciones, a un sistema de cuatro variables en seis ecuaciones.

Hasta aquí se viene suponiendo que el modelo puede ser resuelto para unos valores estrictamente positivos a partir de un conjunto de datos, obviamente numéricos; es así que el modelo teórico ha sido parametrizado en términos de la adopción de formas funcionales específicas para ofertas y demandas. Para disponer de un modelo de equilibrio general computable, se precisa, por último, asignar valores numéricos a los parámetros que definen las entidades funcionales del modelo. La tabla 1 a continuación es reproducción de la aparecida en S&W, en la que se asignan valores reales a parámetros que, como las elasticidades de sustitución y los parámetros de distribución en las funciones CES de utilidad en el caso de los consumidores, o los factores de escala en el caso de las funciones de producción, caracterizan conjuntos de consumo, de producción, los sistemas de preferencias y las dotaciones de factores, es decir, esta tabla asigna valores a los elementos de la expresión (1), que resume los fundamentales de la economía.

Tabla 1. Especificación de parámetros de oferta, demanda y dotaciones para un modelo simple de equilibrio general.

Sector			Parámetros de producción		
			ϕ_i	δ_i	σ_i
Manufacturero			1,5	0,6	2,0
No manufacturero			2,0	0,7	0,5
Parámetros de demanda					
Consumidores ricos			**Consumidores pobres**		
α_1^c	α_2^c	σ^c	α_1^c	α_2^c	σ^c
0,5	0,5	1,5	0,3	0,7	0,75
Dotaciones					
			K		**L**
Hogares ricos			25		0
Hogares pobres			0		60

Fuente: Shoven y Whalley (1984: 1011).

Especificando y resolviendo el modelo computable: una aplicación GAMS

En esta etapa del proceso, se dispone de la información necesaria: de una parte se ha deducido una estructura funcional para el modelo, mientras que, de otra, se tiene una especificación numérica de las cifras que describen los fundamentales de la economía modelo. La tarea siguiente consiste en buscar la solución al modelo en términos de la definición de equilibrio general ofrecida. Parte del artículo de S&W se dedica a sugerir los algoritmos que pueden ser utilizados en esta labor; en Shoven y Whalley (1992) hay una síntesis del algoritmo de Scarf, que fue la base de cálculo para el trabajo de 1984 de los primeros. En cuanto a la forma de presentar el problema, hay varias alternativas, cada una con su propio mérito. Por ejemplo, Dixon, Parmenter y Powell (1992) proponen reemplazar el algoritmo de Scarf por uno menos complicado y más exacto sobre una versión log-lineal del modelo estructural, mientras que Rutherford (1995), con base en la propuesta de Mathiessen (1985), propone una formulación en términos de pares complementarios, esto es, en la forma de un problema de complementariedad mixto o MCP[6].

Ahora, por el primer teorema del bienestar, un modelo de equilibrio general puede ser representado matemáticamente como un programa no lineal o NLP[7] en el que una cierta función objetivo es optimizada, sujeta a un conjunto de restricciones como la disponibilidad de recursos y el bienestar de diferentes clases de consumidores. Un problema de esta clase, en el que la función objetivo es una cierta función agregadora de preferencias individuales, y en el que las restricciones son límites físicos sobre los recursos (o su equivalente financiero) constituye un óptimo de bienestar o programa de Negishi (Ginsburgh & Keyzer, 1997: 18). Observe, sin embargo, que el sistema de ecuaciones (12)~(15) no incluye una función de retorno por ser optimizada. Específicamente, el problema consiste en hallar un vector $p \in \mathbb{R}_{++}^{\ell}$ de precios de bienes finales y de factores primarios que resuelven $p'z(p) \leq 0$. A este tipo de especificación se le conoce como *sistema no lineal restringido* o CNS[8]. Para respetar la definición en S&W, se hace uso de dicha estrategia de formulación que consiste

6 Mixed Complementarity Program.

7 Non Linear Program.

8 Constrained non Linear System.

en representar el modelo compuesto por los bloques de ecuaciones (12) a (15) y seguir en forma estricta las etapas de parametrización, especificación y solución de un modelo de equilibrio general computable.

Para reproducir los resultados de S&W, nos valdremos del "GAMS", un lenguaje algebraico de modelamiento matemático que usa una interfaz que comunica al modelista con diversos solucionadores disponibles[9]. La estructura de un modelo matemático en GAMS comprende la definición y asignación de los conjuntos sobre los cuales las variables endógenas tienen manifestación, la incorporación de datos y la definición de los parámetros, la expresión del modelo y la invocación del solucionador que procesa los símbolos matemáticos y retorna una solución numérica.

Para comenzar, se requiere proporcionar una expresión numérica a los fundamentales de la economía modelo, con el fin de satisfacer los requerimientos de información que indica la expresión (1); de modo que se precisa definir las dimensiones del modelo o, lo que es lo mismo, especificar los conjuntos relevantes de consumidores, industrias y mercancías. Los factores de producción pueden adoptar una definición escalar por lo que no se requiere un conjunto sobre el cual las cantidades totales de factores deban ser expresadas. La siguiente pieza de código GAMS hace efectivos estos requerimientos:

```
*---    Definición de conjuntos

sets      i        sectores productivos     /  mn        manufacturero
                                               nm        no manufacturero /;
          c        consumidores             /  r         consumidor rico
                                               p         consumidor pobre /;
```

Con los conjuntos relevantes definidos, es posible asignar los valores registrados en la tabla 1 a los parámetros, y expresar variables y ecuaciones en los mismos términos. La estrategia de incorporación de información del mundo real consiste en introducir la tabla 1 como una base de datos de las que se extraerá información para luego ser instalada en los parámetros que requiere el modelo. Considere el siguiente conjunto de comandos:

```
*--- Bases de datos

Table prd _ data(i, *) Información sobre la producción sectorial (tabla 1 en S&W, 1984)

               phi       delta        sigma
       mn      1.50      0.60          2.00
       nm      2.00      0.70          0.50;
```

9 La exposición que sigue supone que el lector está familiarizado con los rudimentos del lenguaje GAMS, si bien explica, paso a paso, la construcción de la aplicación computable.

```
Table dem_data(c, *) Información sobre la demanda y los consumidores (tabla 1 en S&W, 1984)

             mn         nm     sigmac     omegak     omegal
      r    0.50       0.50       1.50      25.00       0.00
      p    0.30       0.70       0.75       0.00      60.00;
```

Una mirada no necesariamente atenta encontrará una analogía poco menos que perfecta con la especificación de la tabla 1. En cada tabla, las filas se refieren a los conjuntos previamente definidos (*i*, *c*), mientras que un asterisco indica que el dominio de las columnas puede ser tan grande como el modelista requiera. La conveniencia de esta formulación resulta especialmente útil en la definición de parámetros y la asignación de valores que se requiere para hacerlos funcionales. GAMS es un lenguaje computacional de alto nivel que exige, antes de utilizar cualquier entidad, que esta haya sido previamente declarada (es decir, se debió comunicar al computador su existencia), y luego, ser sujeto de asignación (es decir, debió dársele un valor útil en cálculos numéricos). El comando *parameters* del GAMS sirve para declarar la existencia de esos valores y hacer efectiva su asignación, ya sea como una entrada numérica, o bien, como resultado de un cálculo aritmético basado en valores de otros parámetros previamente definidos y asignados.

```
*--- Parámetros (extrae información de las bases de datos introducidas)

parameters
     phi(i)  Escala en la función de producción
   delta(i)  Distribución en la función de producción
   sigma(i)  Elasticidad de substitución K-L
 alpha(c,i)  Distribución en la función de utilidad
  sigmac(c)  Elasticidad de substitución MN-NM
     ks0(c)  Dotación de capital
     ls0(c)  Dotación de trabajo
     trf(c)  Tasa de transferencias del gobierno al consumidor
    tauk(i)  Impuesto sobre el capital
    taul(i)  Impuesto a la nómina;

     phi(i)  =  prd_data(i, "phi");
   delta(i)  =  prd_data(i, "delta");
   sigma(i)  =  prd_data(i, "sigma");
 alpha(c,i)  =  dem_data(c, i);
  sigmac(c)  =  dem_data(c, "sigmac");
     ks0(c)  =  dem_data(c, "omegak");
     ls0(c)  =  dem_data(c, "omegal");
   trf("p")  =  0.00;
   trf("r")  =  0.00;
    tauk(i)  =  0.00;
    taul(i)  =  0.00;
```

Los parámetros *trp(c)*, *tauk(i)* y *taul(i)* que no hacen parte del conjunto de información en la tabla 1 y que aparecen inicializados con cero, representan los instrumentos fiscales propuestos por S&W para la evaluación de una reforma tributaria que leva impuestos sobre el uso de capital y trabajo de la firma *i*-ésima que luego son repartidos entre los *c* distintos consumidores.

Un modelo matemático está compuesto por variables y ecuaciones. Si la parametrización es suficiente, la representación del sistema de ecuaciones que expresa las relaciones entre las componentes del modelo será el medio de búsqueda de las respuestas que satisfacen el modelo teórico en el conjunto de elección. Tras una parametrización eficaz, se requiere comunicar al procesador cuáles son las variables que requieren un valor particular; este valor, en la solución, ha de ser tal que satisfaga las condiciones establecidas por las ecuaciones (12) a (15) que requieren expresión explícita en el modelo. A la luz de expresiones que reúnen ofertas y demandas en una complicada expresión algebraica como la (16”), parecería más conveniente presentar las condiciones esenciales en el formato (16’) y especificar los componentes por aparte. El resultado es que el número básico de ecuaciones y variables deberá aumentarse justo hasta la cantidad con la cual el sistema de exceso de demanda se puede descomponer, y se tendrán al final dos tipos de ecuaciones: de un lado estarán las condiciones de equilibrio de mercado, que son de naturaleza estructural y que deben ser puestas como parte indispensable del modelo, y, del otro, una suerte de ecuaciones que definen los elementos constitutivos de las ecuaciones estructurales. De esta guisa, observe que la variable *y(c)* –que representa el ingreso del consumidor *c* y que estrictamente corresponde a la expresión (2)–, se expresa como una relación funcional entre los precios de los factores y los *stocks* que de estos tienen los agentes, para luego ser incorporada a la demanda por mercancía *i* del consumidor *c* en la ecuación asociada, que a su vez será referenciada en la función de exceso de demanda de dicha mercancía. La declaración de variables y ecuaciones se resume en la siguiente fracción de código GAMS en el que se distinguen con claridad las mencionadas variables endógenas de las variables auxiliares, así como las ecuaciones estructurales de las ecuaciones de definición; se hace hincapié en el hecho de que son ecuaciones estructurales las que resumen el sistema de exceso de demanda, mientras que las ecuaciones de definición son las que dan expresión a los componentes de aquellas. Los comandos variables y *equations* son el núcleo del procedimiento.

```
*--- El modelo: declaración de componentes (variables y ecuaciones)

variables
      x(c,i)     Demanda del consumidor c por la mercancía i
      ks(c)      Dotación de capital por consumidor
      ls(c)      Dotación de trabajo por consumidor
      y(c)       Ingreso del consumidor c
      q(i)       Producción de la i-ésima mercancía
      k(i)       Demanda de capital de la industria i
      l(i)       Demanda de trabajo de la industria i
      p(i)       Precio de la i-ésima mercancía
      taxr       Ingresos fiscales
      pk         Precio del capital
      pl         Precio del trabajo;
```

```
equations
   xdem _ eq(c,i)    Demanda del consumidor c por la mercancía i
   inc _ eq(c)       Ingreso del consumidor
   xmkt _ eq(i)      Equilibrio en el mercado de bienes
   kdem _ eq(i)      Demanda de capital de la industria i
   ldem _ eq(i)      Demanda de trabajo de la industria i
   prft _ eq(i)      Condiciones de beneficio cero en la industria i
   kmkt _ eq         Equilibrio en el mercado de capital
   lmkt _ eq         Equilibrio en el mercado de trabajo
   taxr _ eq         Recaudo de impuestos;
```

Además de las ecuaciones expresadas en forma explícita en el modelo teórico, aquí se añade la variable adicional *taxr*, que es la suma de los recaudos del gobierno, y una ecuación que relaciona la variable con el resto del sistema: taxr_eq. El modelo no toma forma sino hasta cuando los elementos previamente declarados, parámetros y variables, se funden funcionalmente en las ecuaciones declaradas; a reglón seguido de la declaración de las ecuaciones se requiere escribirlas:

```
*--- El sistema de ecuaciones

xdem _ eq(c,i).. x(c,i) =e= alpha(c,i)*y(c)/((p(i)**sigmac(c))
*(sum(j,alpha(c,j)*p(j)**(1-sigmac(c)))));

xmkt _ eq(i).. q(i) =e= sum(c, x(c,i));

inc _ eq(c).. y(c) =e= pk*ks(c) + pl*ls(c) + trf(c)*taxr;

ldem _ eq(i).. l(i) =e= (q(i)/phi(i))*
(delta(i)**sigma(i))*(((1+taul(i))*pl)**(-
sigma(i)))*(delta(i)**sigma(i)*((1+taul(i))*pl)**(1-sigma(i))+(1
-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(1-sigma(i)))**(sigma(i)/(1-sigma(i)));

kdem _ eq(i).. k(i) =e= (q(i)/phi(i))*((1-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(-
sigma(i)))*(delta(i)**sigma(i)*((1+taul(i))*pl)**(1-sigma(i))+
(1-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(1-sigma(i))) **(sigma(i)/(1-sigma(i)));

lmkt _ eq.. sum(i, l(i)) =e= sum(c, ls(c));

kmkt _ eq.. sum(i, k(i)) =e= sum(c, ks(c));

prft _ eq(i).. ((1+tauk(i))*pk)*k(i) + ((1+taul(i))*pl)*l(i) =e= p(i)*q(i);

taxr _ eq.. taxr =e= pk*sum(i, tauk(i)*k(i)) + pl*sum(i, taul(i)*l(i));
```

El lector estará de acuerdo en que las ecuaciones estructurales: xmkt_eq(*i*), lmkt_eq, kmkt_eq y prft_eq(*i*) son menos complicadas que las ecuaciones de definición, es decir, las soluciones de los problemas de optimización de los agentes en la economía modelo, lo cual habla en favor de la estrategia de descomposición propuesta; es fácil comprobar que las ecuaciones de demanda de factores de la *i*-ésima firma son de la forma (8') y (9'). El inventario de variables y ecuaciones que comprende el modelo se registra en la tabla 2, a continuación:

Tabla 2. Inventario de variables y ecuaciones del modelo.

Variables		Ecuaciones	
x(c,i)	4	xdem_eq(c,i)	4
ks(c)	2	inc_eq(c)	2
ls(c)	2	xmkt_eq(i)	2
y(c)	2	kdem_eq(i)	2
q(i)	2	ldem_eq(i)	2
k(i)	2	prft_eq(i)	2
l(i)	2	kmkt_eq	1
p(i)	2	lmkt_eq	1
Taxr	1	taxr_eq	1
Pk	1		
Pl	1		
Total variables:	21	Total ecuaciones:	17

Puesto que el número de variables supera el número de ecuaciones, se requiere la adopción de un cierre para el modelo, esto es, una decisión consistente en fijar un conjunto de variables –de las declaradas en el modelo– como predeterminadas. En el caso que nos ocupa hay un total de veintiún variables, mientras que solo se han especificado diecisiete ecuaciones independientes. El cierre del modelo consiste en definir cuatro variables que puedan ser fijadas como exógenas. En esta propuesta las variables de cierre son, necesariamente, los pares $ks(c)$ y $ls(c)$ de dotaciones iniciales de los consumidores o, lo que es lo mismo, la distribución de la propiedad de los factores de producción que es fija, salvo, por ejemplo, el caso en el que se haga necesario incorporar cierta dinámica al modelo.

Ofertas y demandas dependen de todos los precios; las estrechas interrelaciones entre las diversas entidades del modelo explican que en el sistema solo existan $\ell - 1$ ecuaciones linealmente independientes, de suerte que, con el fin de obtener una solución, es necesario suprimir una ecuación para corregir las deficiencias de rango que el modelo observa por la condición señalada; la eliminación de la ecuación implica que el sistema tendrá dieciséis ecuaciones y diecisiete variables. La teoría descrita en la sección II establece que el sistema de exceso de demanda es homogéneo de grado 0 en los precios, conclusión que posibilita usar una normalización del vector de los precios respecto del precio del bien numerario (Varian, 1993: 374), es decir, el interés se centra en los precios relativos, al fijar el precio del numerario en forma arbitraria. Los comandos a continuación concluyen el proceso de modelamiento mediante la declaración del modelo y la definición de su cierre, que incluye la normalización de precios. El modelo constará de dieciséis ecuaciones y dieciséis variables que, a la luz del cumplimiento de los supuestos C, P y Z, tendrán solución única:

```
*--- Declaración del modelo, esto es, "El modelo es el siguiente conjunto de ecuaciones:"

model ShovWhal /
               xdem _ eq
               xmkt _ eq
               kdem _ eq
               ldem _ eq
*              kmkt _ eq
               lmkt _ eq
               prft _ eq
```

```
               inc _ eq
               taxr _ eq
              /;

*--- Cierre del modelo
               pl.fx = 1.000;
               ks.fx(c) = ks0(c);
               ls.fx(c) = ls0(c);

*--- Se invoca al solucionador para resolver el modelo

solve ShovWhal using cns;
```

La orden *model ShovWhal* seguida de la lista de ecuaciones entre *slashes*, establece que el modelo, cuyo nombre es ShovWal (podría ser cualquier otro) está compuesto por todas las ecuaciones listadas, a excepción de aquella que aparece comentada con el asterisco en la primera columna del editor, esto es, la ecuación kmkt_eq, que no hace parte del modelo pero que, gracias a la ley de Walras, deberá verse satisfecha en el equilibrio. El cierre del modelo, según se anotó con anterioridad, consiste en fijar algunas de las variables declaradas con el propósito de tener un modelo cuadrado: al poner el sufijo ".fx" (por *fixed*) al nombre de la variable, se indica al procesador que esta adoptará un valor fijo, asignado por el modelista, de tal guisa que la orden *pl.fx=1.000* dice al procesador que el valor del salario es fijo e igual a 1, en tanto que la orden *ks.fx(c)=ks0(c)* dice al procesador que la variable *ks(c)*, definida en el modelo como la dotación de capital por consumidor, adoptará el valor fijo que contiene actualmente el parámetro *ks0(c)* (tabla 1). Finalmente, la orden *solve ShovWhal* using cns ordena pasar el control al procesador para que resuelva el modelo declarado como un CNS.

La salida de solución contiene, además de los valores de las variables, dos partes de interés fundamental: las estadísticas del modelo (*model statistics*) y el resumen de solución (*solve summary*):

```
MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS       8       SINGLE EQUATIONS      16
BLOCKS OF VARIABLES      11       SINGLE VARIABLES      21
NON ZERO ELEMENTS        65       NON LINEAR N-Z        44
DERIVATIVE POOL          12       CONSTANT POOL         30
CODE LENGTH             451
FIXED EQUATIONS          16       FREE VARIABLES        16
```

Las estadísticas del modelo resumen las características de la estructura matemática a la que se acaba de dar solución; de acuerdo con este reporte, el modelo contiene ocho bloques de ecuaciones y once bloques de variables que contienen, a su vez, dieciséis ecuaciones individuales y veintiún variables individuales. Recuerde que al eliminar la ecuación de equilibrio del mercado de capital, el número de ecuaciones individuales se redujo de diecisiete al número que aparece en el reporte. Tampoco olvide que el procesador indica que en efecto hay veintiún variables individuales, de las cuales, gracias a la operación del cierre, solo dieciséis son libres. El resto de la información es de carácter más técnico y no es relevante para la presente discusión, aun cuando se recomienda una revisión de los documentos técnicos del GAMS. De acuerdo con el resumen de solución, el procesador ha terminado el proceso de evaluación en forma normal en tanto que el modelo, con estatus código dieciséis, ha sido resuelto con éxito.

```
               S O L V E      S U M M A R Y

       MODEL ShovWhal
       TYPE CNS
       SOLVER PATH                 FROM LINE 213

**** SOLVER STATUS          1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS           16 SOLVED

 RESOURCE USAGE, LIMIT             0.109      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT          119         10000
 EVALUATION ERRORS                 0             0
```

Este resultado no implica que el modelo haya obtenido una solución correcta desde el punto de vista económico, pues es bastante posible que una deficiente o incluso una mala especificación funcional –resultado probable de una pobre interpretación del contenido teórico de la aplicación–, permita al procesador arrojar una solución numérica que resulte en el "código 16". La ejecución del programa da lugar a una serie de reportes que registran el valor de las ecuaciones y de las variables; estos resultados se presentan en el anexo 4 para los casos base y contrafáctico de la aplicación. El lector verificará que si bien las soluciones reportadas son las mismas que aparecen en las tablas 2, 3 y 4 en S&W (1984: 1012-1014), cuestión que reitera *ex post* que el modelo ha sido correctamente especificado, en ausencia de dicha información el único auxilio del cual puede disponer el analista es, de nuevo y en forma insoslayable, la teoría. En particular, el supuesto Z, elaborado sobre los supuestos C y P, establece que el modelo es homogéneo y verifica la ley de Walras. Se deja como ejercicio probar que este modelo satisface estas dos condiciones: por una parte, si el precio del numerario se dobla o triplica, los precios se doblan o triplican, pero las cantidades reales se mantienen; de otro lado, al reemplazar poscómputo los valores de las variables relevantes en la ecuación de equilibrio del mercado de capital, que fue suprimida para dar un cierre correcto al modelo, sus lados izquierdo y derecho han de ser iguales, dando cumplimiento al aserto de acuerdo con el cual, "si $\ell - 1$ mercados están en equilibrio, el ℓ-ésimo también deberá estarlo".

Comentario final

El anexo 3 contiene el listado GAMS completo del modelo que hemos presentado. Su empleo puede ser extendido a usos tan diversos como el analista requiera. Por ejemplo, incorporando una ecuación de movimiento para el capital, se puede introducir una dinámica de naturaleza recursiva que puede resolverse para un número de períodos introducido por el modelista, mientras que el mercado de trabajo puede representarse como de ajuste incompleto, incorporando una curva de salarios con un *stock* de fuerza de trabajo sin realizar. Al mismo tiempo, es muy fácil incorporar descripciones específicas para el comercio con el resto del mundo e introducir rigideces de precios de diversa índole, como aquellas que ha promovido durante más de treinta años Lance Taylor. Los resultados del experimento adelantado por S&W, consistente en gravar el capital y redistribuir los recaudos entre los consumidores, favoreciendo principalmente al consumidor pobre, si bien fundamentado en un principio moral fácil de aceptar: "Dar a los pobres con cargo a los ricos", falla por razones que no podrían ser comprendidas con facilidad en ausencia de dispositivos analíticos y computacionales como aquel que nos ha ocupado en este documento. La posibilidad de estudiar posibles cursos de resultado de la política y evitar decisiones de impacto nulo o aun negativo sobre el bienestar, así como de entender *ex post* resultados económicos del pasado, justifican en buena parte considerar esta clase de tecnologías como parte del instrumental para la planeación, si bien el síndrome de la "caja negra" que habitualmente se endilga a estos modelos aleja a muchos desde el comienzo. En opinión nuestra, tal síndrome es inexistente: lo que en realidad se requiere es una preparación académica completa y exhaustiva, que constituye el requisito real.

Bibliografía

Arrow, K. J. y Debreu, G. (1954). "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy". *Econometrica*. 22. 3, julio, pp. 265-290.

Arrow, K. J. y Hahn, F. H. (1971). *General Competitive Analysis*. San Francisco, CA: Holden Day.

Chiang, A. C. (1993). *Métodos fundamentales de economía matemática*. México: McGraw-Hill.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. New Haven: Yale University Press.

Dixon, P. B.; Parmenter, B. R.; y Powell, A. A. (1992). *Notes and Problems in Applied General Equilibrium Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Ginsburg, V. y Keyzer, M. (1997). *The Structure of Applied General Equilibrium Models*. Cambridge, MA: MIT Press.

Jehle y Rény. (2001). *Advanced Microeconomic Theory*. NY: Addison-Wesley.

Kehoe, P. y Kehoe, T. (1994). "A Primer on Static Applied General Equilibrium Models". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*. 18. 1, primavera.

Kenrick, D. y Meeraus, A. (1985). "*GAMS: An Introduction*". En The World Bank. *The Development Research Department Technical Report*. Washington: The World Bank.

Mas-Colell, A.; Whinston, M. D.; y Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Mathiessen, L. (1985): "Computational of Economic Equilibria by a Sequence of Linear Complementarity Problems". *Mathematical Programming Study*. 23.

Monsalve, S. (Ed.). (1999). *Introducción a los conceptos de equilibrio en economía*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Munk, K. J. (2005). *Introduction to Construction and Use of CGE Models for Policy Analysis*. Aarhus: Department of Economics-University of Aarhus.

O'Rourke, K. (1995). "Computable General Equilibrium and Economic History". Department of Economics-University College, Dublin. Extraído en enero de 2008 desde http://www.gams.com/solvers/mpsge/orourke.htm

Rutherford, T. F. (1995). Extensions of GAMS for complementarity problems arising in applied economics. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 19. 8. p: 1299-1324.

Scarf, H. (1982). "The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition" En K. Arrow y M. D. Intriligator (Eds.). *Handbook of Mathematical Economics* (Vol. 2). Amsterdam: North-Holland.

Shoven, J. B. y Whalley, J. (1973). "General Equilibrium with Taxes: A Computational Procedure and an Existence Proof". *The Review of Economic Studies*. 40. 4, octubre, pp. 475-489.

Shoven, J. B. y Whalley, J. (1984). "Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey". *Journal of Economic Literature*. Vol. XXII, septiembre, pp. 1007-1051.

Shoven, J. B. y Whalley, J. (1992). *Applying General Equilibrium*. Cambridge: Cambridge University Press.

Silberberg, E. y Suen, W. C. (2001). *The Structure of Economics* (3rd Ed.). New York NY: McGraw-Hill.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1995): *Mathematics for Economic Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Varian. (1993). *Análisis microeconómico*. Tercera edición. Barcelona: Antoni Bosch.

Villar, A. (1999). *Lecciones de microeconomía*. Barcelona: Antoni Bosch.

Willig, R. D. (1976). "Consumer's Surplus Without Apology". *American Economic Review*. 66, septiembre, pp. 589-597.

Anexo 1. Funciones de producción y demandas de factores CES

La función de producción CES en, por ejemplo, capital (K) y trabajo (L), puede escribirse de la siguiente manera[10]:

$$Y = \phi[\delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{[A1.1]}$$

δ es un parámetro de distribución, ρ es un parámetro que se relaciona con la elasticidad de sustitución mediante $\sigma = \rho/(1+\rho)$ y ϕ es el parámetro de escala; los productos marginales del capital y el trabajo y la TMST son (Chiang, 1993):

10 Corresponde al formato que se presenta en Chiang (1993) y Silberberg (1999), entre otros.

$$Y_K = \frac{\phi}{\rho}(\cdots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho\delta K^{\rho-1} \quad \text{[A1.2]}$$

$$Y_L = \frac{\phi}{\rho}(\cdots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho(1-\delta)L^{\rho-1} \quad \text{[A1.3]}$$

$$TMST_{K,L} \equiv \frac{Y_K}{Y_L} = \frac{\frac{\phi}{\rho}(\cdots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho\delta K^{\rho-1}}{\frac{\phi}{\rho}(\cdots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho(1-\delta)L^{\rho-1}} = \frac{\delta}{(1-\delta)}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1} \quad \text{[A1.4]}$$

Las demandas de factores. Considere el problema de minimización de costo unitario para una firma cuya tecnología puede ser descrita con una función de producción como [A1.1]:

$$\min_{k,l} c = rK + wL \quad s.a.: \ \phi[\delta k^{\rho} + (1-\delta)l^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} = 1 \qquad [1.5]$$

r , w son las remuneraciones del capital y del trabajo, respectivamente, mientras que $k = K/Y$ y $l = L/Y$. Los demás símbolos tienen los significados usuales. El lagrangeano de este problema es:

$$\Theta(k,l;\lambda) = rK + wL - \lambda\left[\phi[\delta k^{\rho} + (1-\delta)l^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} = 1\right] \qquad [A1.6]$$

En tanto que las condiciones relevantes para el punto óptimo son:

$$[k]: \quad \lambda\left[\frac{\phi}{\rho}(\dots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho\delta k^{\rho-1}\right] = r \qquad [A1.7]$$

$$[l]: \quad \lambda\left[\frac{\phi}{\rho}(\dots)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho(1-\delta)l^{\rho-1}\right] = k \qquad [A1.8]$$

$$[\lambda]: \quad \phi[\delta k^{\rho} + (1-\delta)l^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} = 1 \qquad [A1.9]$$

Combinando [A1.7] y [A1.8]:

$$\frac{PMg_k}{PMg_l} = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{k}{l}\right)^{\rho-1} = \frac{r}{w} \qquad [A1.10]$$

Resolviendo para *k* la expresión [A1.8]:

$$k = \left[\frac{(1-\delta)}{\delta}\frac{r}{w}\right]^{\frac{1}{\rho-1}} \cdot l \qquad [A1.11]$$

Ahora considere la siguiente transformación sobre esta ecuación:

$$k^{\rho} = \left[\frac{(1-\delta)}{\delta}\frac{r}{w}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} \cdot l^{\rho} \qquad [A1.12]$$

que tiene por propósito ser insertada en [A1.9] y facilitar la manipulación:

$$\phi\left[\delta\left(\left[\frac{(1-\delta)}{\delta}\frac{r}{w}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} \cdot l^{\rho}\right) + (1-\delta)l^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = 1 \qquad [A1.13]$$

De la cual se deriva la demanda de trabajo en el modelo S&W –ecuación (8)–, y que tras manipulación adicional:

$$\delta\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} l^{\rho} + (1-\delta)l^{\rho} = \frac{1}{\phi^{\rho}} \qquad [A1.14]$$

Que expresa en forma unívoca l , y de la cual es posible obtener la demanda de este *input* por unidad de producto; en efecto, para todo $i = 1, \dots n$ (recuerde que anteriormente se hizo $Q_i = 1$):

$$L_i = \frac{Q_i}{\phi_i}\frac{(1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} w^{\frac{1}{(\rho_i-1)}}}{\left(\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot w^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}} + (1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot w^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}}\right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \qquad [A1.15]$$

En forma análoga, para el capital:

$$K_i = \frac{Q_i}{\phi_i}\frac{\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} r^{\frac{1}{(\rho_i-1)}}}{\left(\delta_i^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot w^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}} + (1-\delta_i)^{\frac{1}{(1-\rho_i)}} \cdot r^{\frac{\rho_i}{(\rho_i-1)}}\right)^{\frac{1}{\rho_i}}} \qquad [A1.16]$$

Anexo 2. Preferencias CES y demandas ordinarias

La función de utilidad CES en dos mercancías x_1, x_2, adopta la siguiente forma general:

$$u(x_1, x_2) = \left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad [A2.1]$$

$\alpha_i,\ i = 1,2$ es el parámetro de distribución usual, y ρ se relaciona con la elasticidad de sustitución mediante la regla $\rho = (\sigma - 1)/\sigma$. Note que a diferencia del caso de la producción, el factor de escala puede omitirse (de existir) pues si $v(\cdot)$ representa adecuadamente el preorden de preferencias del individuo y $u(\cdot)$ es una transformación monotónica de $v(\cdot)$ que implica normalizar el intercepto, entonces $u(\cdot)$ transforma adecuadamente las preferencias también (Mas-Collel *et ál.*, 1995: ch. 1).

La solución analítica del problema de maximizar esta función sobre la restricción de presupuesto, da las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{\rho}\right) \alpha_1 x_1^{\rho-1} (\cdots)^{(1-\rho)/\rho} &= \lambda p_1 \\ \left(\tfrac{1}{\rho}\right) \alpha_2 x_2^{\rho-1} (\cdots)^{(1-\rho)/\rho} &= \lambda p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M \end{aligned} \quad [A2.2]$$

M es el ingreso y λ es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción del problema que en algunas circunstancias se entiende como la utilidad marginal del ingreso. Dividiendo las dos primeras ecuaciones en [A2.2], se obtiene la siguiente relación que es precisamente la TMS entre los bienes que componen la elección del consumidor y su relación con los precios relativos (Silberberg & Suen, 2001):

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2}\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \quad [A2.3]$$

La elasticidad de sustitución entre x_1 y x_2 se define como (Sydsaeter & Hammond, 1995):

$$\sigma = -\frac{\partial \ln(x_1^*/x_2^*)}{\partial \ln(p_1/p_2)} = \frac{1}{1-\rho} \quad [A2.4]$$

Reemplazando [A2.4] en el lado derecho de [A2.3]:

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} \longrightarrow x_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} x_2 \quad [A2.5]$$

Poniendo el resultado [A2.5] en la restricción de presupuesto se obtiene:

$$x_2\left(p_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} + p_2\right) = M \quad [A2.6]$$

o lo que es lo mismo:

$$x_2\left(p_1\left(\frac{\alpha_1^{\sigma}}{\alpha_2^{\sigma}}\frac{p_1^{-\sigma}}{p_2^{-\sigma}}\right) + p_2\right) = M \quad [A2.7]$$

Es decir,

$$x_2\left(\frac{p_1\alpha_1^{\sigma}p_1^{-\sigma} + p_2\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}}{\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}}\right) = M \quad [A2.8]$$

De donde, finalmente,

$$x_2 = \frac{\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}}{p_1\alpha_1^{\sigma}p_1^{-\sigma} + p_2\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}} M \quad [A2.9]$$

O si se quiere,

$$x_2 = \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\sigma} \frac{M}{p_1\alpha_1^{\sigma}p_1^{-\sigma} + p_2\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}} \quad [A2.10]$$

En forma análoga:

$$x_1 = \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\sigma} \frac{M}{p_1\alpha_1^{\sigma}p_1^{-\sigma} + p_2\alpha_2^{\sigma}p_2^{-\sigma}} \quad [A2.11]$$

S&W usan una función objetivo un poco diferente de [A2.1], por lo que las demandas ordinarias difieren de [A2.10] y [A2.11]. En particular, la expresión (4) del artículo es (omitiendo los subíndices que identifican a los consumidores):

$$u(x_1, x_2) = \left(\alpha_1^{1-\rho} x_1^{\rho} + \alpha_2^{1-\rho} x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \rho = (\sigma - 1)/\sigma \qquad \text{[A2.12]}$$

Las condiciones de primer orden para el problema de maximización de la utilidad [A2.9] sujeta a la restricción de presupuesto son (compare con [A2.2]):

$$\begin{aligned} \alpha_1^{1-\rho} x_1^{\rho-1} (\cdots)^{(1-\rho)/\rho} &= \lambda p_1 \\ \alpha_2^{1-\rho} x_2^{\rho-1} (\cdots)^{(1-\rho)/\rho} &= \lambda p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M \end{aligned} \qquad \text{[A2.13]}$$

De las dos primeras expresiones en [A2.13], se puede obtener (compare con [A2.3]):

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \qquad \text{[A2.14]}$$

Es decir:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} \quad x_2 \qquad \text{[A2.15]}$$

Poniendo este resultado en la restricción de presupuesto y operando:

$$\left.\begin{aligned} p_1 \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} x_2\right] + p_2 x_2 &= M \\ x_2 \left[p_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} + p_2\right] &= M \\ x_2 \left[\frac{\alpha_1 p_1 p_1^{-\sigma} + \alpha_2 p_2 p_2^{-\sigma}}{\alpha_2 p_2^{-\sigma}}\right] &= M \end{aligned}\right\} \qquad \text{[A2.15']}$$

De donde, en forma inmediata:

$$x_2 = \frac{\alpha_2 M}{p_2^{\sigma}\left(\alpha_1 p_1^{1-\sigma} + \alpha_2 p_2^{1-\sigma}\right)} \qquad \text{[A2.16]}$$

$$x_1 = \frac{\alpha_1 M}{p_1^{\sigma}\left(\alpha_1 p_1^{1-\sigma} + \alpha_2 p_2^{1-\sigma}\right)} \qquad \text{[A2.17]}$$

Que constituyen las demandas ordinarias con las cuales se soluciona el problema de maximización de la utilidad [A2.12] sobre el conjunto presupuestal usual. Comparando con las demandas [A2.10] y [A2.11], la diferencia aquí tiene que ver con el exponente en el parámetro de participación en el numerador. Observe en todo caso que a pesar de que las funciones de demanda (5) en el documento de S&W contienen un error tipográfico, son idénticas a las funciones recién derivadas.

Anexo 3. Implementación computable del modelo S&W con GAMS

```
*---
*--- Programa.....: ECI-TAE2-Shoven-Whalley-Tax-CNS.gms
*--- Autor........: Jumping Jack Flash -- jcsegura@lasalle.edu.co
*--- Propósito....: El modelo original de Shoven & Whalley en GAMS (vectorial)
*--- Fuentes......: Shoven J. & J. Whalley. "Applied General-Equilibrium Models of Taxation
*--- and Trade: An Introduction and Survey," Journal of Economic Literature,
*--- Vol. XXII (September 1984), pp. 1007-1051 (SW84)
*--- ----------- (1992): Appliying General Equilibrium.Cambride: Cambridge
*--- University Press
*--- Segura, J.C. (2004); CEGC.
*--- Notas........: formulación básica con gobierno como un sistema de ecuaciones simultáneas
*--- - Se debe incluir una nueva variable: taxr (ingresos fiscales)
*--- - Se debe incluir una nueva ecuacion: taxr_eq (ecuación de ingresos fiscales)
*--- - Las demandas de factores deben modificarse para incluir los impuestos
*--- - La restricción de beneficio cero debe modificarse para incluir impuestos
*--- - El ingreso de los consumidores debe incluir transferencias del gobierno
*--- - Los instrumentos tauk(i) y taul(i) son las tasas de impuestos sobre k y sobre l
*--- - El instrumento trf(c) es la tasa de transferencias a cada tipo de hogar
*---
*--- Revisión.....: agosto, 2004
*--- enero, 2005
*--- julio 2006

*--- Ambiente general

option limrow = 0;
option limcol = 0;

*--- Definición de conjuntos

set        i        Sectores productivos      / mn       manufacturero
                                                nm       No manufacturero /

           c        Consumidores              / r        consumidor rico
                                                p        consumidor pobre /;

alias(i,j);

*--- Bases de datos

table
        prd_data(i, *)       Información sobre la producción sectorial (tabla 1 en S&W, 1984)

               phi     delta   sigma
       mn      1.50    0.60    2.00
       nm      2.00    0.70    0.50;
```

```
table
        dem _ data(c, *)       Información sobre la demanda y los consumidores (tabla 1 en S&W, 1984)

              mn      nm      sigmac     omegak    omegal
       r      0.50    0.50    1.50       25.00     0.00
       p      0.30    0.70    0.75       0.00      60.00;

*--- Parámetros (extrae información de las bases de datos introducidas)

parameters
                  phi(i)    Escala en la función de producción (CES)             --
Sector i
                delta(i)    Distribución en la función de producción (CES)       --
Sector i
                sigma(i)    Elasticidad de substitución K-L (CES)                --
Sector i
              alpha(c,i)    Distribución en la función de utilidad (CES)         --
Consumidor c
               sigmac(c)    Elasticidad de substitución MN-NM (CES)              --
Consumidor c
                  ks0(c)    Dotación de capital                                  --
Consumidor c
                  ls0(c)    Dotación de trabajo                                  --
Consumidor c
                  trf(c)    Tasa de transferencias del gobierno al consumidor
                 tauk(i)    Impuesto sobre el capital
                 taul(i)    Impuesto a la nómina;

                  phi(i)  =  prd _ data(i, "phi");
                delta(i)  =  prd _ data(i, "delta");
                sigma(i)  =  prd _ data(i, "sigma");
              alpha(c,i)  =  dem _ data(c, i);
               sigmac(c)  =  dem _ data(c, "sigmac");
                  ks0(c)  =  dem _ data(c, "omegak");
                  ls0(c)  =  dem _ data(c, "omegal");
                trf("p")  =  0.00;
                trf("r")  =  0.00;
                 tauk(i)  =  0.00;
                 taul(i)  =  0.00;

*--- El Modelo
variables
                  x(c,i)    Demanda del consumidor c por la mercancía i          --
Consumidor c - Mercancía i
                   ks(c)    Dotación de capital por consumidor                   --
Consumidor c
                   ls(c)    Dotación de trabajo por consumidor                   --
Consumidor c
                    y(c)    Ingreso del consumidor c
                    q(i)    Producción de la i-ésima mercancía                   --
Sector i
                    k(i)    Demanda de capital de la industria i                 --
```

```
Sector i
                    l(i)    Demanda de trabajo de la industria i               --
Sector i
                    p(i)    Precio de la i-ésima mercancía                     --
Sector i
                    taxr    Ingresos fiscales
                      pk    Precio del capital
                      pl    Precio del trabajo;

equations
           xdem_eq(c,i)    Demanda del consumidor c por la mercancía i
              inc_eq(c)    Ingreso del consumidor
             xmkt_eq(i)    Equilibrio en el mercado de bienes
             kdem_eq(i)    Demanda de capital de la industria i
             ldem_eq(i)    Demanda de trabajo de la industria i
             prft_eq(i)    Condiciones de beneficio cero en la industria i
                kmkt_eq    Equilibrio en el mercado de capital
                lmkt_eq    Equilibrio en el mercado de trabajo
                taxr_eq    Recaudo de impuestos;

*--- Demandas de bienes

 xdem_eq(c,i)..       x(c,i)   =e=   alpha(c,i)*y(c)/((p(i)**sigmac(c))
                                     *(sum(j,alpha(c,j)*p(j)**(1-sigmac(c)))));

*--- Equilibrio en el mercado de bienes

 xmkt_eq(i)..         q(i)     =e=   sum(c, x(c,i));

 inc_eq(c)..          y(c)     =e=   pk*ks(c) + pl*ls(c) + trf(c)*taxr;

*--- Demandas de factores

 ldem_eq(i)..         l(i)     =e=   (q(i)/phi(i))*
                                     (delta(i)**sigma(i))*(((1+taul(i))*pl)**(-sigma(i)))*
                                     (delta(i)**sigma(i)*((1+taul(i))*pl)**(1-sigma(i)) +
                                     (1-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(1-sigma(i)))
                                     **(sigma(i)/(1-sigma(i)));

 kdem_eq(i)..         k(i)     =e=   (q(i)/phi(i))*
                                     ((1-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(-sigma(i)))*
                                     (delta(i)**sigma(i)*((1+taul(i))*pl)**(1-sigma(i)) +
                                     (1-delta(i))**sigma(i)*((1+tauk(i))*pk)**(1-sigma(i)))
                                     **(sigma(i)/(1-sigma(i)));

*--- Equilibrio en el mercado de factores

 lmkt_eq.. sum(i, l(i)) =e= sum(c, ls(c));

 kmkt_eq.. sum(i, k(i)) =e= sum(c, ks(c));
```

```
*--- Condiciones de beneficio cero (ecuaciones de precios)

 prft_eq(i).. ((1+tauk(i))*pk)*k(i) + ((1+taul(i))*pl)*l(i) =e= p(i)*q(i);

*--- Ingreso del sector público -- Recaudos fiscales

 taxr_eq.. taxr =e= pk*sum(i, tauk(i)*k(i)) + pl*sum(i, taul(i)*l(i));

*--- Declaración del modelo, i.e., "El modelo es el siguiente conjunto de ecuaciones:"

model ShovWhal /
                 xdem_eq
                 xmkt_eq
                 kdem_eq
                 ldem_eq
*                kmkt_eq
                 lmkt_eq
                 prft_eq
                  inc_eq
                 taxr_eq
               /;

*--- Inicialización de variables (al valor de la SAM inicial S&W tabla 2.0 ----*
             pk.l   =    1.000;
             pl.l   =    1.000;
        p.l("mn")   =    1.000;
        p.l("nm")   =    1.000;
        q.l("mn")   =    1.000;
        q.l("nm")   =    1.000;
        k.l("mn")   =    1.000;
        k.l("nm")   =    1.000;
        l.l("mn")   =    1.000;
        l.l("nm")   =    1.000;
        ks.l("p")   =    0.000;
        ks.l("r")   =   25.000;
        ls.l("p")   =    0.000;
        ls.l("r")   =   60.000;
    x.l("p","mn")   =    1.000;
    x.l("r","mn")   =    1.000;
    x.l("p","nm")   =    1.000;
    x.l("r","nm")   =    1.000;
         y.l("p")   =    1.000;
         y.l("r")   =    1.000;

*--- Límite inferior de las variables
            pk.lo   =    0.01*pk.l;
            pl.lo   =    0.01*pl.l;
       p.lo("mn")   =    0.01*p.l("mn");
       p.lo("nm")   =    0.01*p.l("nm");
       q.lo("mn")   =    0.01*q.l("mn");
       q.lo("nm")   =    0.01*q.l("nm");
       k.lo("mn")   =    0.01*k.l("mn");
```

```
       k.lo("nm")   =   0.01*k.l("nm");
       l.lo("mn")   =   0.01*k.l("nm");
       l.lo("nm")   =   0.01*l.l("nm");
   x.lo("p","mn")   =   0.01*x.l("p","mn");
   x.lo("r","mn")   =   0.01*x.l("r","mn");
   x.lo("p","nm")   =   0.01*x.l("p","nm");
   x.lo("r","nm")   =   0.01*x.l("r","nm");
        y.lo("p")   =   0.01*y.l("p");
        y.lo("r")   =   0.01*y.l("r");

*--- Cierre del modelo
            pl.fx   =   1.000;
         ks.fx(c)   =   ks0(c);
         ls.fx(c)   =   ls0(c);

*--- Se invoca al solucionador para resolver el modelo

option cns = path;

*ShovWal.holdfixed = 1.0;
*ShovWal.tolinfrep = 0.1;

solve ShovWhal using cns;

*$OnText
*--- Se guardan las soluciones del escenario base (BMK) para ser comparados con las de los contra-
factuales (CTF)

parameters
          x0(c,i)       Demanda del consumidor c por la mercancía i -- BMK
           ks0(c)       Dotación de capital por consumidor -- BMK
           ls0(c)       Dotación de trabajo por consumidor -- BMK
            e0(c)       Gasto del consumidor c -- BMK
            u0(c)       Utilidad del consumidor c -- BMK
            y0(c)       Ingreso del consumidor c -- BMK
            q0(i)       Producción de la i-ésima mercancía -- BMK
            k0(i)       Demanda de capital de la industria i -- BMK
            l0(i)       Demanda de trabajo de la industria i -- BMK
            p0(i)       Precio de la i-ésima mercancía -- BMK
        walcheck0       Verificación de la ley de Walras -- BMK
            taxr0       Ingresos fiscales -- BMK
              pk0       Precio del capital -- BMK
              pl0       Precio del trabajo -- BMK;

          x0(c,i)   =   x.l(c,i);
           ks0(c)   =   ks.l(c);
           ls0(c)   =   ls.l(c);

 u0(c) = (sum(i, (alpha(c,i)**(1/sigmac(c)))*x.l(c,i)
 **((sigmac(c)-1)/(sigmac(c))))**(sigmac(c)/
 (sigmac(c)-1)));
```

```
            y0(c)   =   y.l(c);
            q0(i)   =   q.l(i);
            k0(i)   =   k.l(i);
            l0(i)   =   l.l(i);
            p0(i)   =   p.l(i);
            e0(c)   =   sum(i,p0(i)*x0(c,i));
        walcheck0   =   sum(i, k.l(i)) - sum(c, ks.l(c));
            taxr0   =   taxr.l;
              pk0   =   pk.l;
              pl0   =   pl.l;

*--- Se ensaya un conjunto de reportes de resultados

parameters
 report1 Reporte de resultados 1 -- Precios y producción -- Firma i
 report2 Reporte de resultados 2 -- Demandas finales -- Consumidor c
 report3 Reporte de resultados 3 -- Ingreso y gastos -- Consumidor c
 report4 Reporte de resultados 4 -- Evaluación de bienestar;

       report1("Precios", i,"BASE")   = p0(i);
       report1("Precios","k","BASE")  = pk0;
       report1("Precios","l","BASE")  = pl0;
       report1("Ofertas", i,"BASE")   = q0(i);
       report1("p*q    ", i,"BASE")   = p0(i)*q0(i);
       report1("K      ", i,"BASE")   = k0(i);
       report1("L      ", i,"BASE")   = l0(i);
       report1("r*K    ", i,"BASE")   = pk0*k0(i);
       report1("w*L    ", i,"BASE")   = pl0*l0(i);
       report1("CT     ", i,"BASE")   = pk0*k0(i) + pl0*l0(i);
       report1("CT/q   ", i,"BASE")   = (pk0*k0(i) + pl0*l0(i))/q0(i);
       report1("Walras "," ","BASE")  = walcheck0;

       report2("Demandas","BMK",c,i) = x0(c,i);

       report3("Utilidad", c,"BASE")  = u0(c);
       report3("Gastos ", c,"BASE")   = e0(c);
       report3("Rentas ", c,"BASE")   = (pk0*ks0(c));
       report3("Salarios", c,"BASE")  = (pl0*ls0(c));
       report3("Ingreso ", c,"BASE")  = y0(c);

display report1, report2, report3;

*---
*--- Contrafactual: El ejercicio planteado por S&W, 1984 implica imponer una tasa del 50% al con-
sumo de
*--- capital de la industria manufacturera, y transferir el 60% de los recaudos al
*--- hogar pobre, dejando el resto (40%) al hogar rico.


          trf("p")   =   0.60;
          trf("r")   =   0.40;
        tauk("mn")   =   0.50;
```

```
       tauk("nm")   =   0.00;
       taul("mn")   =   0.00;
       taul("nm")   =   0.00;

*        ks.fx(c)   =   ks0(c)*1.25;
*        ls.fx(c)   =   ls0(c)*1.30;

solve ShovWhal using cns;

parameters
        u1(c) Utilidad del consumidor c -- Escenario contrafactual
        walcheck1 Verificación de la ley de Walras en el CTF
        hev(c) Variación equivalente hicksiana -- Consumidor c
        hcv(c) Variación compensatoria hicksiana -- Consumdor c;

 u1(c) = (sum(i, (alpha(c,i)**(1/sigmac(c)))*x.l(c,i)**((sigmac(c)-1)
 /(sigmac(c))))**(sigmac(c)/(sigmac(c)-1)));

       walcheck1   =   sum(i, k.l(i)) - sum(c, ks.l(c));

          hev(c)   =   (u1(c)-u0(c))/u0(c)*y0(c);
          hcv(c)   =   (u1(c)-u0(c))/u1(c)*y.l(c);

     report1("Precios", i," CTF")  =   p.l(i);
     report1("Precios","k"," CTF") =   pk.l;
     report1("Precios","l"," CTF") =   pl.l;
     report1("Ofertas", i," CTF")  =   q.l(i);
     report1("p*q ", i," CTF")     =   p.l(i)*q.l(i);
     report1("K ", i," CTF")       =   k.l(i);
     report1("L ", i," CTF")       =   l.l(i);
     report1("r*K ", i," CTF")     =   pk.l*k.l(i);
     report1("w*L ", i," CTF")     =   pl.l*l.l(i);
     report1("CT ", i," CTF")      =   pk.l*k.l(i) + pl.l*l.l(i);
     report1("CT/q ", i," CTF")    =   (pk.l*k.l(i) + pl.l*l.l(i))/q.l(i);
     report1("Walras "," "," CTF")     =     walcheck1;

     report1("Precios", i," d%")   =   100*((p.l(i)/p0(i))-1);
     report1("Precios","k"," d%")  =   100*((pk.l/pk0)-1);
     report1("Precios","l"," d%")  =   100*((pl.l/pl0)-1);
     report1("Ofertas", i," d%")   =   100*((q.l(i)/q0(i))-1);
     report1("p*q ", i," d%")      =   100*((p.l(i)*q.l(i)/report1("p*q ", i,"BASE"))-1);
     report1("K ", i," d%")        =   100*((k.l(i)/k0(i))-1);
     report1("L ", i," d%")        =   100*((l.l(i)/l0(i))-1);
     report1("r*K ", i," d%")      =   100*((pk.l*k.l(i)/report1("r*K ", i,"BASE"))-1);
     report1("w*L ", i," d%")      =   100*((pl.l*l.l(i)/report1("w*L ", i,"BASE"))-1);
     report1("CT ", i," d%")       =   100*(((pk.l*k.l(i) + pl.l*l.l(i))/report1("CT ", i,"BASE"))-1);
     report1("CT/q ", i," d%")     =   100*((((pk.l*k.l(i)   +   pl.l*l.l(i))/q.l(i))/report1("CT/q   ",
i,"BASE"))-1);
     report1("Walras "," "," d%")  =   100*((walcheck1/walcheck1)-1);

     report2("Demandas","CTF",c,i)     =     x.l(c,i);
     report2("Demandas"," d%",c,i)     =     100*((x.l(c,i)/x0(c,i))-1);
```

```
      report3("Utilidad",c,"CTF")   =   u1(c);
      report3("Gastos ",c,"CTF")    =   sum(i,p.l(i)*x.l(c,i));
      report3("Rentas ",c,"CTF")    =   (pk.l*ks.l(c));
      report3("Salarios",c,"CTF")   =   (pl.l*ls.l(c));
      report3("Ingreso ",c,"CTF")   =   y.l(c);
      report3("Transf ",c,"CTF")    =   trf(c)*taxr.l;

      report3("Utilidad",c," d%") = 100*((u1(c)/u0(c))-1);

      report4(c,"HEV") = hev(c);
      report4(c,"HCV") = hcv(c);
      report4("Total","HEV") = sum(c, hev(c));
      report4("Total","HCV") = sum(c, hcv(c));
      report4("WL/GDP","HEV") = 100*(sum(c, hev(c))/sum(c,y.l(c)));
      report4("WL/GDP","HCV") = 100*(sum(c, hcv(c))/sum(c,y.l(c)));
      report4("WL/Tax","HEV")$(taxr.l ne 0) = 100*(sum(c, hev(c))/(taxr.l));
      report4("WL/Tax","HCV")$(taxr.l ne 0) = 100*(sum(c, hcv(c))/(taxr.l));

display report1, report2, report3, report4;

* Eof () -- Jumping Jack Flash
```

Anexo 4. Salidas y resultados del modelo computable

```
---- 363 PARAMETER report1 Reporte de resultados 1 -- Precios y producción -- Firma i

                     BASE        CTF          d%

Precios .mn       1.399       1.467       4.818
Precios .nm       1.093       1.006      -7.987
Precios .k        1.373       1.128     -17.898
Precios .l        1.000       1.000
k       .mn       6.212       4.039     -34.982
k       .nm      18.788      20.961      11.566
l       .mn      26.366      25.999      -1.390
l       .nm      33.634      34.001       1.090
Ofertas .mn      24.942      22.387     -10.247
Ofertas .nm      54.378      57.307       5.386
p*q     .mn      34.897      32.830      -5.923
p*q     .nm      59.439      57.638      -3.031
r*K     .mn       8.532       4.554     -46.619
r*K     .nm      25.805      23.637      -8.402
w*L     .mn      26.366      25.999      -1.390
w*L     .nm      33.634      34.001       1.090
CT      .mn      34.897      30.553     -12.448
CT      .nm      59.439      57.638      -3.031
CT/q    .mn       1.399       1.365      -2.453
CT/q    .nm       1.093       1.006      -7.987
Walras  .   1.50635E-12 -1.4456E-11  -1.1102E-14
```

```
---- 363 PARAMETER report2 Reporte de resultados 2 -- Demandas finales -- Consumidor c

INDEX 1 = Demandas

             mn        nm

BMK.r     11.515    16.675
BMK.p     13.428    37.704
CTF.r      8.989    15.827
CTF.p     13.397    41.480
 d%.r    -21.931    -5.080
 d%.p     -0.227    10.015


---- 363 PARAMETER report3 Reporte de resultados 3 -- Ingreso y gastos -- Consumidor c

                    BASE        CTF          d%

Utilidad .r       27.872     24.176     -13.259
Utilidad .p       50.891     54.282       6.663
Gastos   .r       34.337     29.102
Gastos   .p       60.000     61.366
Rentas   .r       34.337     28.191
Salarios .p       60.000     60.000
Ingreso  .r       34.337     29.102
Ingreso  .p       60.000     61.366
Transf   .r                   0.911
Transf   .p                   1.366


---- 363 PARAMETER report4 Reporte de resultados 4 -- Evaluación de bienestar

            HEV        HCV

r        -4.553     -4.449
p         3.998      3.833
Total    -0.555     -0.615
WL/GDP   -0.614     -0.680
WL/Tax  -24.383    -27.022
```